Musterlösung
Mathematik III

1. **a)** Sei C die Scheibe mit Rand K, d.h. $C = \{(x, y, z) \mid x^2 + (y-5)^2 \leq 9;\ z = 1\}$ und wählen wir γ so, dass γ im Gegenuhrzeigersinn entlang K läuft. Somit ist $\underline{n} = (0, 0, 1)$ die Normale zu C. Dann gilt nach der Satz von Stokes

$$A = \int_{\gamma=\partial C} F ds = \iint_C \langle \operatorname{rot} F, \underline{n} \rangle \, dx\, dy,$$

mit

$$\operatorname{rot}\ F = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} - \frac{1}{y} \\ 0 - 0 \\ 0 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schliesslich erhalten wir

$$A = \int_{\gamma=\partial C} F ds = \iint_C \langle \operatorname{rot} F, \underline{n} \rangle \, dx\, dy = 2 \iint_C dx\, dy = 18\ \pi.$$

Alternative mit Polarkoordinaten. Parametrisierung von C:

$$\underline{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u\ \cos(v) \\ u\ \sin(v) + 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v \in [0, 2\pi],\ u \in [0, 3].$$

Dann $\underline{x}_u \times \underline{x}_v = (0, 0, v)$. Somit mit Stokes

$$A = \int_{\gamma=\partial C} F ds = \iint_C \langle \operatorname{rot} F(x), \underline{x}_u \times \underline{x}_v \rangle \, du\, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^3 2\ v\, dv\, du = 18\pi.$$

b) Wir führen die neuen Koordinaten: $u = y + 2\ x,\ v = y - 3\ x$ ein.
Die Koordinatentransformation ist dann durch

$$\begin{array}{rccc} \varphi\ : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x(u,v) = \frac{u-v}{5} \\ y(u,v) = \frac{3\ u + 2\ v}{5} \end{pmatrix} \end{array}$$

gegeben. Folglich

$$d\varphi = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(d\varphi) = \frac{1}{5},$$

und das Parallelogramm ist durch folgende Koordinatenlinien

$$\begin{aligned} y = -2\ x + 1 \to u = 1; \qquad & y = -2\ x + 3 \to u = 3 \\ y = 3\ x \to v = 0; \qquad & y = 3\ x + 1 \to v = 1. \end{aligned}$$

im neuen Koordinatensystem begrenzt. Somit ist die

$$\text{Fläche} = \int_1^3 \int_0^1 \frac{1}{5}\ dv\ du = \frac{2}{5}.$$

Bitte wenden!

c) Ansatz: $u(t,x) = X(x)T(t)$. Dann gilt

$$T(t)X''(x) + T(t)X'(x) - \frac{1}{\log(t)}T'(t)X(x) = 0$$

$$T(t)(X''(x) + X'(x)) = \frac{T'(t)}{\log(t)}X(x)$$

$$\frac{X''(x) + X'(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\log(t)\cdot T(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{X''(x) + X'(x)}{X(x)} = \lambda = \frac{T'(t)}{\log(t)\cdot T(t)}$$

bzw.

1. $X''(x) + X'(x) = \lambda X(x)$ und
2. $\lambda \log(t)T(t) = T'(t)$.

1. $A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ wobei $Y(x) := X'(x)$ und

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} X(x) \\ Y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'(x) \\ Y'(x) \end{pmatrix}.$$

2. $\frac{dT}{dt} = \log(t)T$

$$\Rightarrow \int \frac{dT}{T} = \int \lambda \log(t)dt$$

$$= \lambda \left(t\ \log(t) - \int \frac{t}{t}\ dt \right)$$

$$= \lambda\,(t\ \log(t) - t + C)$$

$\Rightarrow \log(T) = \lambda(t\ \log(t) - t + C)$
$\Rightarrow T = \widetilde{C}\ e^{-\lambda t}\ t^{\lambda t}$

2. **a)** Der Fluss des Vektorfeldes rot$F$ durch $\mathcal{F}_i$, i = 1,2 ist gegeben durch

$$\int_{\mathcal{F}_i} \mathrm{rot}F \cdot d\mathbf{n_i}.$$

Wir nehmen an, dass die geschlossene Kurve γ so orientiert ist, dass sie im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird wenn man sie aus der Richtung der Flächennormalen n_1 der Fläche $\mathcal{F}_1$ betrachtet. Also wird sie im Uhrzeigersinn durchlaufen wenn man sie aus der Richtung n_2 betrachtet. Daher liefert der Satz von Stokes das Folgende.

$$\int_{\mathcal{F}_1} \mathrm{rot}F \cdot d\mathbf{n_1} = \int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} \tag{1}$$

$$\int_{\mathcal{F}_2} \mathrm{rot}F \cdot d\mathbf{n_2} = -\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

b) Nach dem Satz von Gauss gilt

$$0 = \int_{\partial\mathcal{K}} \mathrm{rot}F \cdot d\mathbf{n} = \int_{\mathcal{K}} \mathrm{div}(\mathrm{rot}F)dV. \tag{4}$$

Gleichung 4 gilt für alle Flächen $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$. Daraus folgt, dass div(rot$F$) = 0 gelten muss. Denn angenommen das Vektorfeld rot besitzt Quellen und Senken, so kann man eine der Flächen so abändern, dass $\mathcal{K}$ etwa eine Senke weniger umschliesst und somit der Fluss von F durch $\partial\mathcal{K}$ ungleich null wird. Widerspruch.

Siehe nächstes Blatt!

c) Wir rechnen

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = \operatorname{div}\left((\partial_y F_z - \partial_z F_y, \partial_z F_x - \partial_x F_z, \partial_x F_y - \partial_y F_x)^T\right) = \\ = \partial_x\partial_y F_z - \partial_x\partial_z F_y + \partial_y\partial_z F_x - \partial_y\partial_x F_z + \partial_z\partial_x F_y - \partial_z\partial_y F_x = 0\end{aligned}$$

nach dem Lemma von Schwartz. Weiter rechnet man wie folgt.

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\begin{pmatrix}\sin(yz)\\ ze^x\\ \ln(z/x)\end{pmatrix}\right) = \operatorname{div}\left(\begin{pmatrix}-e^x\\ y\cos(yz)+1/x\\ ze^x - z\cos(yz)\end{pmatrix}\right) = \\ = -e^x + \cos(yz) - yz\sin(yz) + e^x - \cos(yz) + zy\sin(yz) = 0.\end{aligned}$$